

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

Аннотация.

Актуальность и цели. Рассматриваются некоторые вопросы оптимального управления, а именно теории динамических игр для случая, когда динамика игры описывается линейными интегродифференциальными и интегральными векторными уравнениями Вольтерра. Целью работы является решение задач оптимизации функционалов типа расстояния в основном в смысле Нэша.

Материалы и методы. Для решения этих задач автором построена некоторая модификация известной экстремальной конструкции академика Н. Н. Красовского, разработанная для обыкновенных дифференциальных систем. Центральным элементом этой модификации является новое определение позиции игры для вычисления которой требуется полная память по управляющим воздействиям, что существенно усложняет все исследование по сравнению со случаем обыкновенных дифференциальных систем. Рассмотренный метод может быть распространен и на случай нелинейных интегродифференциальных и интегральных систем.

Результаты и выводы. В работе получены существенно новые результаты, которые дополняют и расширяют общую теорию динамических игр.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение Вольтерра, интегральное уравнение Вольтерра, управляющее воздействие, измеримая функция, позиция игры, оптимальная стратегия.

V. L. Pasikov

SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF LINEAR DYNAMIC NONANTAGONISTIC GAMES

Abstract.

Background. The paper discusses some problems of optimal control, namely, the theory of dynamic games when the dynamics of a game is described by the linear integrodifferential and integral vector Volterra equations. The aim is to solve the problems of optimization of distance-type functionals mainly in the sense of Nash.

Materials and methods. To solve these problems, the author built a modification of the famous extreme construction of the academician N. N. Krasovskiy developed for ordinary differential systems. The centerpiece of this modification is the new definition of the position of the game for which it is necessary to calculate the total memory to manage stress, that greatly complicates the entire study compared with the case of ordinary differential systems.

Results and conclusions. The considered method can be extended to the case of nonlinear integrodifferential and integral systems. The paper presents significantly new results that complement and extend the general theory of dynamic games.

Key words: integrodifferential equation of Volterra, Volterra integral equation, control action, measurable function, position of the game, optimal strategy.

Предлагаемая работа продолжает исследование [1]. В дальнейшем следует иметь в виду, что встречающиеся ниже обозначения и понятия, не сопровождаемые ссылками и пояснениями, определены в [1]. Решение задач

приводится на основе методов, разработанных в [2–5], а также их модификаций из [5–8].

1. Рассматривается задача 1 из [1] с системой функционалов [4]:

$$Y_i(u_1, \dots, u_m) = \varphi_i(x(\theta)), \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

здесь предполагается, что каждая функция $\varphi_i(x)$ определена и непрерывна на всем пространстве R^n и удовлетворяет следующим условиям:

1) множество $G_i(\alpha_i) = \{x : \varphi_i(x) \leq \alpha_i, \alpha_i \in R\}$ выпукло,

2) $G_i(\alpha_i^{(1)}) = G_i(\alpha_i^{(2)}) \Leftrightarrow \alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(2)}$.

Исследуем сначала вспомогательную задачу.

Найдем стратегии, уравнивающие систему функционалов [4]:

$$\tilde{Y}_i(u_1, \dots, u_m) = \rho(x(\theta), G_i(\alpha_i)), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

здесь α_i – фиксированные числа; $\rho(x(\theta), G_i(\alpha_i))$ – расстояние от точки $x(\theta)$ до множества $G_i(\alpha_i)$, которое определяется формулой

$$\rho(x, G_i(\alpha_i)) = \inf_{y \in G_i(\alpha_i)} \rho(x, y).$$

Будем рассматривать, как и в [1], три случая динамических систем, описывающих эволюцию управляемого объекта.

Пусть движение объекта описывается системой интегродифференциальных уравнений Вольтерра с управляющими воздействиями вне интеграла

$$x(t) = f(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t, s)x(s)ds + \sum_{i=1}^m u_i(t), \quad x(0) = x_0,$$

тогда для любого $t_0 \in [0, \theta]$ начала процесса управления вводится величина

$$\varepsilon(t_0, x(\theta, t), \alpha_k) = \max_{\|l\|=1} \left\{ \min_{c \in G_k(\alpha_k)} \left[(l'(c - x(\theta, t_0))) - \int_{t_0}^{\theta} \max_{u_k \in U_k} \{l' \cdot \tilde{x}(\theta, s)\} u_k(s) ds - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \int_{t_0}^t \min_{u_i \in U_i} \{l' \cdot \tilde{x}(\theta, s)\} u_i(s) ds \right] \right\}, \quad (3)$$

которая согласно [5–7] является евклидовым расстоянием от точки $x(\theta, t)$ до множества $G_k(\alpha_k)$, $k = \overline{1, m}$, при выборе игроками P_i , $i = \overline{1, m}$, $i \neq k$, своих управляющих воздействий наихудшим образом, т.е. они желают максимизировать величину (3), а игрок P_k величину (3) минимизирует.

В выражении (3) максимум достигается на единственном векторе $l_k = l_k(t_0, x(\theta, t_0), \alpha_k)$, непрерывно зависящем от позиции игры $\{t_0, x(\theta, t_0)\}$

в случае, когда $\varepsilon_k(t_0, x(\theta, t_0), \alpha_k) > 0$ [2], т.е. рассматривается регулярный случай.

Напомним, что в [1] введены обозначения $\Phi(t, s) = \int_s^t K(t, \tau) X(\tau, s) d\tau$,

$$\varphi(s) = \Phi(s, 0)x_0 + f(s), \tilde{x}(t, s) = X(t, s) + \int_s^t X(t, \tau) R(\tau, s) d\tau,$$

$R(t, s)$ – резольвента матрицы $\Phi(t, s)$,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t, s) &= X(t, s) + \int_s^t X(t, \tau) R(\tau, s) d\tau, x(\theta, t_0) = X(\theta, 0)x_0 + \\ &+ \int_0^\theta x(\theta, s) \varphi(\theta, s) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^{t_0} \tilde{x}(\theta, s) u_i(s) ds, \end{aligned}$$

$X(t, s)$ – матрица Коши системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

После решения задачи (3) – определения вектора l_k и точки $c_k \in G_k(\alpha_k)$, ближайшей в евклидовой метрике к позиции $x(\theta, t_0)$, определяем условие экстремального прицеливания для k -го игрока:

$$x_k^e(t_0) u^e(t_0) = \max_{u_k \in U_k} x_k^e(t_0) \cdot u_k, \quad (4)$$

где $x_k^e(t_0) = l_k \tilde{x}(\theta, t_0)$.

Далее вводится функция

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(t, x(\theta, t), \alpha_k) &= l_k(c_k - x(\theta, t_0)) - \int_t^\theta x_k^e(t) u_k^e(t) dt - \\ &- \int_{t_0}^t x_k^e(t) u_k(t) dt - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \int_{t_0}^\theta x_k^e(t) u_k^e(s) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

В выражении (5) с возрастанием t оптимальная стратегия игрока P_k заменяется на произвольную допустимую. Вычисляем в (5) производную, получаем

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = x_k^e(t) u_k^e(t) - x_k^e(t) u_k(t) = \max_{u_k \in U_k} x_k^e(t) u_k - x_k^e(t) u_k(t) \geq 0,$$

отсюда вытекает, что функция $\varepsilon_k(t, x(\theta, t), \alpha_k)$, $k = \overline{1, m}$, не убывает при замене оптимальной стратегии k -го игрока на произвольную допустимую u_k , таким образом, для системы функционалов (2) выполняются неравенства

$$\tilde{Y}_i(u_1^e, \dots, u_m^e) \leq \tilde{Y}_i(u_1^e, \dots, u_{k-1}^e, u_k, u_{k+1}^e, \dots, u_m^e), \quad (6)$$

т.е. оптимальные стратегии, определяемые согласно (4), уравнивают в смысле Нэша систему функционалов (2). Теперь рассматриваем задачу 1 из [1].

Из формулы (3) следует, что $\varepsilon_k(t, x, \alpha_k)$ строго возрастает при возрастании α_k . Пусть α_k^0 – наименьший корень уравнений $\varepsilon_k(t, x, \alpha_k) = 0$ при фиксированных t и x . Если это уравнение не имеет решения, то полагаем $\alpha_k^0 = \min \phi_k(x)$. Из неравенства (6) и строгой монотонности $\varepsilon_k(t, x, \alpha_k)$ по α_k получаем $\alpha_k^0(\theta, x^e(\theta)) \leq \alpha_k^0(\theta, x^k(\theta))$; $x^e(\theta)$ – точка решения системы (2) при $t = \theta$ и стратегиях $u_1^e, \dots, u_{k-1}^e, u_k, u_{k+1}^e, \dots, u_m^e$; u_k – произвольное допустимое управление.

Так как $\alpha_k^0(\theta, x(\theta)) = \phi_k(x(\theta))$, то $\phi_k(x^e(\theta)) \leq \phi_k(x^k(\theta))$, и, следовательно, получаем решение задачи 1.

Теорема 1. Оптимальные стратегии, определяемые условиями (4) для системы (2), уравнивают в смысле Нэша систему функционалов (1).

2. Пусть теперь динамика управляемого объекта описывается системой (15), в которой управляющие воздействия содержатся под знаком интеграла

$$\dot{x}(t) = f(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t, s)x(s)ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t B_i(t, s)u_i(s)ds, \quad x(0) = x_0,$$

а ее решение с заданным начальным условием определяется формулой (16) из [1]:

$$x(t) = X(t, 0)x_0 + \int_0^t X(t, s)\Psi(s, 0)ds\varphi(0) + \\ \int_0^t \left[\int_s^t X(t, \tau)\Psi(\tau, s)d\tau \right] d\varphi(s) + \int_0^t \sum_{i=1}^m \left[\int_s^\theta X(t, \tau)\chi_i(\tau, s)d\tau \right] u_i(s)ds.$$

Напомним, что здесь

$$\Psi(t, s) = E + \int_s^t R(t, \tau)d\tau,$$

E – единичная матрица,

$$\chi_i(t, s) = \Psi(t, s)B_i(s, s) + \int_s^t \frac{\partial B_i(\tau, s)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$x(\theta, t_0) = X(\theta, 0)x_0 + \int_0^\theta \left[\int_s^\theta X(\theta, \tau)\Psi(\tau, s)d\tau \right] d\varphi(s) +$$

$$+ \int_0^{t_0} \sum_{i=0}^m \left[\int_s^\theta X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, s) d\tau \right] u_i(s) ds,$$

$$\tilde{x}(\theta, t) = \int_t^\theta X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, t) dt.$$

Теперь используем полученное в [1] с помощью формулы (17) состояние системы (16), в момент $t_0 \leq t < \theta$, которое записываем в следующем виде:

$$x(\theta, t) = x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^m \left[\int_s^\theta X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, s) d\tau \right] u_i(s) ds,$$

далее решаем задачу нахождения экстремального вектора l_k , $k = \overline{1, m}$, и точки $c_k \in G_k(\alpha_k)$, ближайшей в евклидовой метрике к позиции $x(\theta, t_0)$

$$\varepsilon_k(t_0, x(\theta, t_0), \alpha_k) = \max_{\|l\|=1} \left\{ \min_{c \in G_k(\alpha_k)} \left[(l'(c - x(\theta, t_0))) - \int_{t_0}^\theta \max_{u_k \in U_k} (l' \tilde{x}_k(\theta, s)) u_k(s) ds - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \int_{t_0}^\theta \min_{u_i \in U_i} (l' \tilde{x}_i(\theta, s)) u_i(s) ds \right] \right\}. \quad (7)$$

После нахождения решения задачи (7) l_k и c_k , аналогично (4), определяем условие экстремального прицеливания игрока P_k :

$$x_k^e(t_0) u^e(t_0) = \max_{u_k \in U_k} x_k^e(t_0) u_k, \quad 0 \leq t_0 < \theta, \quad x_k^e(t_0) = l_k' \tilde{x}(\theta, t_0). \quad (8)$$

Далее записываем функцию $\varepsilon_k(t, x(\theta, t), \alpha_k)$, которая по форме полностью аналогична функции (5) и дословным повторением дальнейших, после (5), рассуждений доказывается утверждение.

Теорема 2. Оптимальные стратегии, определяемые условиями (8) для исследования системы, уравнивают в смысле Нэша систему функционалов (1).

3. Рассмотрим теперь случай, когда эволюция управляемого объекта описывается системой линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода

$$x(t) = f(t) + \int_0^t A(t, s) x(s) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t B_i(t, s) u_i(s) ds,$$

тогда, как было указано в [7], состояние системы в момент $t \in [t_0, \theta)$ определяется формулой

$$x(\theta, t) = \Phi(\theta, 0)f(0) + \int_0^\theta \Phi(\theta, s)df(s) + \sum_{i=1}^m \int_0^{t_0} X_i(\theta, s)u_i[s]ds + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t X_i(\theta, s)u_i(s)ds,$$

здесь $\Phi(t, s) = E + \int_s^t R(t, \tau)d\tau$; E – единичная матрица; $R(t, s)$ – резольвента матрицы

$$A(t, s), X_i(\theta, s) = \Phi(\theta, s)B_i(s, s) + \int_s^\theta \Phi(\theta, \tau) \frac{\partial B_i(\tau, s)}{\partial \tau} d\tau.$$

Теперь записываем выражение

$$\varepsilon_k(t_0, x(\theta, t_0), \alpha_k) = \max_{\|l\|=1} \left\{ \min_{c \in G_k(\alpha_k)} (l'(c - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^\theta \max_{u_k \in U^k} \{l'X_k(\theta, s)\}u_k(s)ds - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \int_{t_0}^t \min_{u_i \in U_i} \{l'X_i(\theta, s)\}u_i(s)ds \right\}, \quad (9)$$

которое является евклидовым расстоянием от позиции $x(\theta, t_0)$ до множества $G_k(\alpha_k)$, после решения задачи (9) записываем функцию

$$\varepsilon_k(t, x(\theta, t), \alpha_k) = l'_k(c_k - x(\theta, t_0)) - \int_t^\theta x_k^e(t)u_e^k(t)dt - \int_{t_0}^t x_k^e(t)u_k(t)dt - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \int_{t_0}^\theta x_k^e(t)u_i^e(s)ds,$$

здесь $x_k^e(t) = l'_k x_k(\theta, t)$, $u_i^e, i = \overline{1, m}$ – оптимальное управление.

Далее все рассуждения аналогичны доказательству теоремы 1. Таким образом, справедливо следующее утверждение для рассмотренного случая.

Теорема 3. Оптимальные стратегии, определяемые условиями (8) для линейной интегральной системы Вольтерра 2-го рода, уравнивают в смысле Нэша систему функционалов (1).

Замечание. Отметим, что из каждой позиции $x(\theta, t_0)$, $t_0 \in [0, \theta]$, для каждой совокупности стратегий игроков $\{u_1, \dots, u_m\}$ получается пучок решений и в доказательствах речь идет об одной кривой из этого пучка. На практике физически невозможно непрерывно изменять значения управляющих воздействий, поэтому в исследованиях по динамическим играм [2, 3] отрезку управления, например $[0, \theta]$, назначают некоторое разбиение на частичные промежутки $[t_i, t_{i+1})$ и в моменты t_i определяют управляющее воздействие на весь полуинтервал $[t_i, t_{i+1})$ как непрерывную или постоянную функцию, а затем переходят к пределу при стремлении к нулю ранга разбиения в соответствующей метрике.

В предлагаемой работе эти моменты опущены, так как сводятся к пере-сказыванию результатов из работ других авторов.

4. Пусть теперь в n -мерном фазовом пространстве R^n движется группа из m точек $x_i, i = \overline{1, m}$, эволюция каждой из которых описывается системой

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t) + A_i(t)x_i(t) + \int_0^t K_i(t, s)x_i(s)ds + u_i(t), x_i(0) = x_i^0, \quad (10)$$

эту группу преследует точка x , движущаяся в том же фазовом пространстве R^n по закону

$$\dot{x}(t) = f(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t, s)x(s)ds + u(t), x(0) = x_0, \quad (11)$$

в (10), (11) ограничения на параметры аналогичны ограничениям для (2).

В каждый момент $t \in [0, \theta]$ игрокам известны взаимные положения преследуемых и преследователя. В качестве платы игры рассматривается величина

$$J = \sum_{i=1}^m \alpha_i \|x_i(\theta) - x(\theta)\|, \quad (12)$$

игроки $P_i, i = \overline{1, m}$, распоряжаются выбором управляющих воздействий $u_i \in U_i$, а игрок P распоряжается выбором управляющего воздействия $u \in U$; U_i, U – выпуклые компакты в R^n ; $t_0 \in [0, \theta]$ – начало процесса управления. Для преследующей точки x требуется найти стратегию, которая к моменту θ позволит минимизировать величину (12) при любых допустимых воздействиях преследуемых точек $x_i, i = \overline{1, m}$.

Решения систем (10) и (11) записываем по формулам [6]:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= X_i(t, 0)x_i^0 + \int_0^t \tilde{x}_i(t, s)\varphi_i(s)ds + \int_0^t \tilde{x}_i(t, s)u_i(s)ds, x(t) = \\ &= X(t, 0)x_0 + \int_0^t \tilde{x}(t, s)\varphi(s) + \int_0^t \tilde{x}(t, s)u(s)ds, \end{aligned}$$

где $X_i(t, s), X(t, s)$ – матрицы Коши систем

$$\dot{x}_i(t) = A_i(t)x_i(t), x(t) = A(t)x(t);$$

$R_i(t, s), R(t, s)$ – резольвенты матриц

$$\begin{aligned} \Phi_i(t, s) &= \int_s^t K_i(t, \tau)X_i(\tau, s)d\tau, \Phi(t, s) = \int_s^t K(t, \tau)X(\tau, s)d\tau, \\ \tilde{x}_i(t, s) &= X_i(t, s) + \int_s^t X_i(t, \tau)R_i(\tau, s)d\tau, x(t, s) = X(t, s) + \int_s^t X(t, \tau)R(\tau, s)d\tau, \end{aligned}$$

$$\varphi_i(s) = \Phi_i(s, 0)x_i^0 + f_i(s), \varphi(s) = \Phi(s, 0)x_0 + f(s).$$

Если до момента t , $t \in [t_0, t)$, игроки применяли некоторые допустимые управления, а после момента t имеем $u_i(t) \equiv 0, u(t) \equiv 0$, то состояния систем (42), (43) можно записать следующим образом:

$$x_i(\theta, t) = X_i(\theta, 0)x_i^0 + \int_0^\theta \tilde{x}_i(\theta, s)\varphi_i(s)ds + \int_0^{t_0} \tilde{x}_i(\theta, s)u[s]ds + \int_{t_0}^t \tilde{x}_i(\theta, s)u_i(s)ds; \quad (13)$$

$$x(\theta, t) = X(\theta, 0)x_0 + \int_0^\theta \tilde{x}(\theta, s)\varphi(s)ds + \int_t^{t_0} \tilde{x}_i(\theta, s)u[s]ds + \int_{t_0}^t \tilde{x}(\theta, s)u(s)ds, \quad (14)$$

обозначим

$$\begin{aligned} x_i(\theta, t_0) &= X_i(\theta, 0)x_i^0 + \int_0^\theta \tilde{x}_i(\theta, s)\varphi_i(s)ds + \int_t^{t_0} \tilde{x}_i(\theta, s)u_i[s]ds, x(\theta, t_0) = \\ &= X(\theta, 0)x_0 + \int_0^\theta \tilde{x}(\theta, s)\varphi(s)ds + \int_t^{t_0} \tilde{x}(\theta, s)u[s]ds, \end{aligned}$$

тогда

$$x_i(\theta, t) = x_i(\theta, t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{x}_i(\theta, s)u_i(s)ds, x(\theta, t) = x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{x}(\theta, s)u(s)ds;$$

$$\begin{aligned} J_i = \alpha_i \|x_i(\theta) - x(\theta)\| &= \alpha_i \max_{\|l_i\|=1} \left\{ l_i' \left[(x_i(\theta, t_0) - x(\theta, t_0)) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_{t_0}^\theta \max_{u_i(s) \in U_i} \tilde{x}_i(\theta, s)u_i(s)ds - \int_{t_0}^\theta \max_{u(s) \in U} x(\theta, s)u(s)ds \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

По (15) строим функцию типа программного максимина

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) &= \alpha_i \cdot \max_{\|l\|=1} \left\{ l' \left[(x_i(\theta, t_0) - x(\theta, t_0)) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_{t_0}^t \max_{u_i(s) \in U_i} \tilde{x}_i(\theta, s)u_i(s)ds - \alpha_i \int_{t_0}^t \max_{u(s) \in U} \tilde{x}(\theta, s)u(s)ds \right] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

решаем в каждый момент $t \in [t_0, \theta)$ задачу (16) нахождения экстремального вектора l_i и определяем экстремальные стратегии игроков.

После решения задачи (16) вводим обозначения $l_i' \tilde{x}_i(\theta, s) = x_i^e(s)$. При этом предполагается, что в каждый момент $t \in [t_0, \theta)$ решение задачи (16) единственное, т.е. рассматривается регулярный случай.

Оптимальные стратегии P_i , $i = \overline{1, m}$, определяем в каждый момент $t \in [t_0, \theta)$ условием

$$\max_{u_i \in U_i} x_i^e(t) \cdot u_i(t) = x_i^e(t) \cdot u_i^e. \quad (17)$$

Для игрока P записываем вектор $l_0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i l_i$ и его оптимальную стратегию в каждый момент $t \in [t_0, \theta)$ определяем соотношением

$$\max_{u \in U} x^e(t) \cdot u(t) = x^e(t) u^e, \quad (18)$$

где $x^e(t) = l_0 \cdot \tilde{x}(\theta, t)$.

Теперь на основе величины (16) записываем функцию при $1 \leq k \leq m$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \sum_{i=1}^m \alpha_i l_i' (x_i(\theta, t_0) - x(\theta, t_0)) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \alpha_i \int_{t_0}^{\theta} x_i^e(s) u_i^e(s) ds + \\ & + \alpha_k \int_{t_0}^t x_k^e(s) u_k(s) ds + \alpha_k \int_t^{\theta} x_k^e(s) u_k^e(s) ds - \int_{t_0}^{\theta} x^e(s) u^e(s) ds, \end{aligned} \quad (19)$$

здесь игрок P_k с увеличением t начиная с момента t_0 заменяет свою оптимальную стратегию на произвольную допустимую; вычисляем для (19) производную

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \alpha_k \cdot x_k^e(t) u_k(t) - \alpha_k x_k^e(t) u_k^e(t),$$

с учетом (17) $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \leq 0$, таким образом, с возрастанием t функция $\varepsilon(t)$ не возрастает и, следовательно, $\varepsilon(t) \leq \varepsilon(t_0)$, где $\varepsilon(t_0)$ – программный максимум,

$$\varepsilon(t_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i l_i' (x_i(\theta, t_0) - x(\theta, t_0)) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{t_0}^{\theta} x_i^e(s) u_i^e(s) ds - \int_{t_0}^{\theta} x^e(s) u^e(s) ds.$$

В монографии [5, с. 335] величина $\alpha_i \|x_i(\theta) - x(\theta)\|$ называется защищенностью точки x_i , величина $\sum_{i=1}^m \alpha_i \|x_i(\theta) - x(\theta)\|$ – защищенностью группы.

Следовательно, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Если эволюции преследуемых и преследователя описываются системами (10) и (11), то в регулярном случае при выборе игроком P своей оптимальной стратегии для защищенности группы $P_1, \dots, P_m$ ему будет обеспечен результат $\varepsilon(\theta) \leq \varepsilon(t_0)$ при любых допустимых реализациях управляющих воздействий игроков $P_1, \dots, P_m$.

5. Пусть теперь в пространстве R^n движется группа из m точек x_i , $i = \overline{1, m}$, эволюция каждой из которых описывается системой

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t) + A_i(t)x_i(t)x_i(t) + \int_0^t K_i(t,s)x_i(s)ds + \int_0^t B_i(t,s)u_i(s)ds, x_i(0) = x_i^0, \quad (20)$$

эту группу преследует точка x , движущаяся в том же фазовом пространстве R^n по закону

$$\dot{x}(t) = f(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + \int_0^t B(t,s)u(s)ds, x(0) = x_0, \quad (21)$$

решения систем (20) и (21) записываем по формулам [7]:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= X_i(t,0)x_i^0 + \int_0^t X_i(t,s)\Psi_i(s,0)ds\varphi_i(0) + \\ &+ \int_0^t \left[\int_s^t X_i(t,\tau)\Psi_i(\tau,s)d\tau \right] d\varphi_i(s) + \int_0^t \left[\int_s^t X(t,\tau)\chi_i(\tau,s)d\tau \right] u_i(s)ds, \\ x(t) &= X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s)\Psi(s,0)ds \cdot \varphi(0) + \\ &+ \int_0^t \left[\int_s^t X(t,\tau)\Psi(\tau,s)d\tau \right] d\varphi(s) + \int_0^t \left[\int_s^t X(t,\tau)\chi(\tau,s)d\tau \right] u(s)ds, \end{aligned}$$

в дополнение к предыдущему здесь $\Psi_i(t,s) = E + \int_s^t R_i(t,\tau)d\tau$, $R_i(t,s)$ – резольвента матрицы $\Phi_i(t,s)$; $\Psi(t,s) = E + \int_s^t R(t,\tau)d\tau$, $R(t,s)$ – резольвента матрицы $\Phi(t,s)$; далее

$$x_i(\theta, t_0) = X_i(\theta, 0)x_i^0 + \int_0^\theta X_i(\theta, s)\Psi_i(s, 0)ds\varphi_i(0) +$$

$$+ \int_0^\theta \left[\int_0^\theta X_i(\theta, \tau) \Psi_i(\tau, s) d\tau \right] d\varphi_i(s) + \int_0^{t_0} \left[\int_s^\theta X(\theta, \tau) \chi(\tau, s) d\tau \right] u_i[s] ds ;$$

$$x(\theta, t_0) = X(\theta, 0)x_0 + \int_0^\theta X(\theta, s)\Psi(s, 0)ds\varphi(0) +$$

$$\int_0^\theta \left[\int_s^\theta X(\theta, \tau)\Psi(\tau, s)d\tau \right] d\varphi(s) + \int_0^{t_0} \left[\int_s^\theta X(\theta, \tau)\chi(\tau, s)d\tau \right] u[s]ds,$$

тогда

$$\begin{aligned} x_i(\theta, t) &= x_i(\theta, t_0) + \int_{t_0}^t \left[\int_s^\theta X_i(\theta, \tau)\chi_i(\tau, s)d\tau \right] u_i(s)ds, x(\theta, t) = \\ &= x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^t \left[\int_s^\theta X(\theta, \tau)\chi(\tau, s)d\tau \right] u(s)ds. \end{aligned}$$

Программный максимум для P_i определяем формулой

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t_0) &= \max_{\|l\|=1} l' \left\{ (x_i(\theta, t_0) - x(\theta, t_0)) + \int_0^{t_0} \max_{u_i \in U_i} \left[\int_s^\theta l' X_i(\theta, \tau)\chi_i(\tau, s)d\tau \right] u_i(s)ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_0} \max_{u \in U} \left[\int_s^\theta l' X(\theta, \tau)\chi(\tau, s)d\tau \right] u(s)ds \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть l_i – решение задачи (22), n -мерные вектор-строки $\alpha_i(t) = l'_i X_i(\theta, t)$, $\alpha(t) = l'_i X(\theta, t)$, они согласно [2, с. 384] являются решениями дифференциальных систем $\dot{\alpha}_i(t) = -A_i(t)\alpha_i$, $\dot{\alpha}(t) = -A(t)\alpha$ с краевым условием l_i . Обозначим для краткости

$$x_i^e(t) = \int_t^\theta \alpha'_i(\tau)\chi_i(\tau, s)d\tau, x^e(t) = \int_t^\theta \alpha'(\tau)\chi(\tau, s)d\tau,$$

тогда

$$\varepsilon_i(t_0) = l'_i((x_i(\theta, t_0) - x(\theta, t_0)) + \int_0^{t_0} \max_{u_i \in U_i} x_i^e(s)u_i(s)ds - \int_0^{t_0} \max_{u \in U} x^e(s)u(s)ds).$$

Далее составляем функцию

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i l'_i (x_i(\theta, t_0) - x(\theta, t_0)) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \alpha_i \int_{t_0}^\theta x_i^e(s)u_i^e(s)ds +$$

$$+\alpha_k \int_{t_0}^t x_k^e(s)u_k(s)ds + \alpha_k \int_t^\theta x_k^e(s)u_k^e(s)ds - \int_0^\theta x^e(s)x(s)ds$$

и вычисляем ее производную

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \alpha_k x_k^e(t)u_k(t) - \alpha_k x_k^e(t)u_k^e(t),$$

условия оптимальности здесь по форме совпадают с (17), (18), тогда $\frac{d\varepsilon}{dt} \leq 0$.

Таким образом при замене игроком P_k оптимальной стратегии на произвольную допустимую функция $\varepsilon(t)$ не возрастает, следовательно, $\varepsilon(t) \leq \varepsilon(t_0)$.

Следовательно доказано следующее утверждение.

Теорема 5. Если эволюции преследуемых и преследователя описываются системами (20), (21), то в регулярном случае при выборе игроком P своей оптимальной стратегии для защищенности группы $P_1, \dots, P_m$ ему будет обеспечен результат $\varepsilon(\theta) \leq \varepsilon(t_0)$ при любых допустимых реализациях управляющих воздействий игроков $P_1, \dots, P_m$.

6. Рассматриваем теперь случай, когда эволюция объектов преследуемой группы описывается линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода

$$x_i(t) = f_i(t) + \int_0^t A_i(t,s)x_i(s)ds + \int_0^t B_i(t,s)u_i(s)ds, \quad (23)$$

эволюция преследователя описывается системой

$$x(t) = f(t) + \int_0^t A(t,s)x(s)ds + \int_0^t B(t,s)u(s)ds. \quad (24)$$

Системы (23), (24) являются линейными интегральными системами Вольтерра 2-го рода) и удовлетворяют условиям, указанным в [1, 8]. Опишем кратко решение задачи для этих систем.

Записываем программный максимин для игрока P_i :

$$\varepsilon_i(t_0, x(\theta, t_0)) = \max_{\|l\|=1} l' \left[(x_i(\theta, t_0) - x(\theta, t_0)) + \int_{t_0}^\theta \max_{u_i \in U_i} \{l' X_i(\theta, s)\} u_i(s) ds + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^\theta \max_{u_i \in U_i} \{l' X_i(\theta, s)\} u_i(s) ds \right]. \quad (25)$$

Теперь решаем задачу (25) нахождения экстремального вектора l_i , вводим обозначения $x_i^e(t) = l_i' X_i(\theta, t)$, $l_0 = \sum_{i=1}^m l_i$; оптимальные (экстремальные) значения формально определяются равенствами (49), (50). Далее составляем функцию

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^m l_i(x_i(\theta, t_0) - x(\theta, t_0)) + \int_{t_0}^t x_k^e(\theta, s) u_k(s) + \int_t^\theta x_k^e(s) u_k^e(s) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \int_{t_0}^\theta x_i^e(s) u_i^e(s) ds,$$

здесь идет с увеличением t замена оптимальной стратегии игрока P_k на произвольную допустимую. Вычисляем производную

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = x_k^e(\theta, t) u_k(t) - x_k^e(t) u_k^e(t) \leq 0$$

согласно определению оптимальной стратегии игрока P_k . Получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Если эволюции преследуемых и преследователя описываются системами (55), (56), то в случае при выборе игроком P своей оптимальной стратегии для защищенности группы $P_1, \dots, P_m$ ему будет обеспечен результат $\varepsilon(\theta) \leq \varepsilon(t_0)$ при любых допустимых реализациях управляющих воздействий игроков $P_1, \dots, P_m$.

Список литературы

1. **Пасиков, В. Л.** К теории линейных динамических неантагонистических игр / В. Л. Пасиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 75–86.
2. **Красовский, Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
3. **Субботин, А. И.** Оптимизация гарантии в задачах управления / А. И. Субботин, А. Г. Ченцов. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
4. **Гороховик, В. В.** О линейных дифференциальных играх нескольких лиц / В. В. Гороховик, Ф. М. Кириллова // Управляемые системы. – 1971. – № 10. – С. 3–9.
5. **Габасов, Р.** Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. Кириллов. – М.: Наука, 1971. – 508 с.
6. **Пасиков, В. Л.** Экстремальные стратегии в игровых задачах для линейных интегродифференцированных систем Вольтерра / В. Л. Пасиков // Вестник Южно-уральского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Физика. – 2012. – Т. 7, № 34 (293). – С. 33–42.
7. **Пасиков, В. Л.** Задача сближения-уклонения для линейных интегродифференциальных систем Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла / В. Л. Пасиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 58–70.
8. **Пасиков, В. Л.** Экстремальное прицеливание в игре линейных систем Вольтерра / В. Л. Пасиков // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. XXII, № 5. – С. 907–909.

References

1. Pasikov V. L. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2013, no. 2 (26), pp. 75–86.
2. Krasovskiy N. N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizheniy* [Game problems on motion meeting]. Moscow: Nauka, 1970, 420 p.
3. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow: Nauka, 1981, 288 p.

4. Gorokhovik V. V., Kirillova F. M. *Upravlyaemye sistemy* [Controllable systems]. 1971, no. 10, pp. 3–9.
5. Gabasov R., Kirillov F. *Kachestvennaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Qualitative theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1971, 508 p.
6. Pasikov V. L. *Vestnik Yuzhno-ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika* [Bulletin of South-Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics]. 2012, vol. 7, no. 34 (293), pp. 33–42.
7. Pasikov V. L. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 2 (18), pp. 58–70.
8. Pasikov V. L. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1986, vol. XXII, no. 5, pp. 907–909.

Пасиков Владимир Леонидович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра естественно-
математических дисциплин, Орский
филиал Оренбургского государственного
института менеджмента (Россия,
Оренбургская область,
г. Орск, Орское шоссе, 4)

E-mail: pasikov_fmfm@mail.ru

Pasikov Vladimir Leonidovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of natural and mathematical
disciplines, Orsk branch of Orenburg State
Institute of Management (4 Orskoe
highway, Orsk, Orenburg region, Russia)

УДК 517.977

Пасиков, В. Л.

Некоторые задачи теории линейных динамических неантагонистических игр / В. Л. Пасиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 2 (30). – С. 59–72.